

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМ ФАКТОРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СГУСТКОВ ДЛЯ РАСЧЁТА ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

М.М. Токтаганова

Научный руководитель: Д.А. Шкитов, к.ф.-м.н.  
Томский политехнический университет, Томск 634050, Россия  
E-mail: mmt8@tpu.ru

## Введение

Переходное излучение (ПИ) возникает при пересечении заряженными частицами границы раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{1,2}$  (в статье граница вакуум ( $\varepsilon_1 = 1$ ) – металл ( $\varepsilon_2 = \infty$ )) [1]. Данное излучение используется для диагностики релятивистских пучков заряженных частиц в ускорителях [2].

Полное спектрально-угловое распределение интенсивности ПИ определяется через выражение:

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = [N + N(N-1) \cdot F(k)] \cdot \frac{d^2W_0}{d\omega d\Omega}, \quad (1)$$

где  $\frac{d^2W_0}{d\omega d\Omega}$  – спектрально-угловое распределение ПИ от одной частицы, получаемое аналитически из теории, либо численно с помощью моделирования,  $N$  – число частиц в пучке,  $k$  – волновой вектор излучения,  $F(k)$  – форм фактор (ФФ) сгустка. Форм фактор описывает когерентную часть спектра, т.е. это коэффициент, характеризующий долю частиц, излучающих когерентно. Излучение называют когерентным, когда его интенсивность пропорциональна  $N^2$  [3]. Зная ФФ можно рассчитать полную интенсивность излучения.

В данной работе для расчета форм фактора применяются два подхода: общеизвестный аналитический и новый численный подход.

## Аналитический подход

В аналитическом подходе предполагается непрерывное пространственное распределение частиц. В таком случае ФФ рассчитывается как:

$$F = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(r) \exp\{-i\Delta\varphi\} dr \right|^2, \Delta\varphi = k\Delta r - \omega\Delta t,$$

где  $r$  – радиус вектор, проведенный к частице в сгустке из начала координат системы мишени,  $\rho(r)$  – нормированное пространственное распределение частиц (ПРЧ) в пучке,  $\Delta\varphi$  – сдвиг фазы излучения,  $\omega$  – частота излучения,  $\Delta r$  – геометрическая разность хода,  $\Delta t$  – время «запаздывания» частицы. Сдвиг фазы для случая ПИ «назад» находится из геометрических соотношений [4, 5] (см. рис. 1).

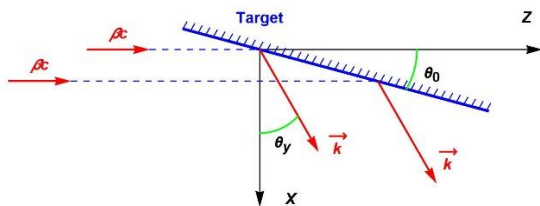


Рис. 1. Кинематика ПИ в плоскости xOz

Задав ПРЧ тремя гауссианами по трём осям, опуская математические выкладки, получим формулу ФФ для последовательности сгустков с произвольными расстояниями между сгустками, зарядами и продольными и поперечными размерами (2):

$$F = \left| \sum_1^m \mu_p e^{-\frac{2\pi^2}{\lambda^2} (\sigma_{xp}^2 A^2 + \sigma_{yp}^2 B^2 + \sigma_{zp}^2 C^2)} e^{-i\frac{2\pi}{\lambda} z_p C} \right|^2, \quad (2)$$

$$A = \cos \theta_x \cos \theta_y + \frac{\cos \theta_x \sin \theta_y - C}{\tan \theta_0},$$

$$B = \sin \theta_x, C = 1/\beta,$$

где  $m$  – количество сгустков,  $\mu_p$  – доля заряда  $p$ -го сгустка,  $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$  – размеры  $p$ -го сгустка по осям  $x, y, z$ ,  $z_p$  – координата центра  $p$ -го сгустка по оси  $z$ , отсчитываемая от центра системы координат,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $\beta$  – отношение скорости частицы к скорости света,  $\theta_y, \theta_x$  – углы направления вектора наблюдения в пространстве,  $\theta_0$  – угол наклона мишени.

На основе формулы (2) в пакете Wolfram Mathematica создан манипулятор (см. рис. 2), позволяющий в интерактивном режиме рассчитать ФФ для равномерной последовательности одинаковых сгустков и отобразить наглядную схему генерации ПИ, задавая следующие параметры: кол-во сгустков, расстояние между ними, энергия частиц, размеры сгустков, угол наклона мишени относительно оси  $Y$ , положение детектора, а также параметры визуализации схемы генерации ПИ и движения сгустков. Выражение (2) получено для гауссовых сгустков, однако, на практике встречаются сгустки, ПРЧ которых невозможно описать аналитически.

## Численный подход

Численный подход предполагает прямой расчёт ФФ последовательности сгустков, зная дискретное распределение частиц по всем координатам. Близкое к реальному ПРЧ можно получить, например, с помощью кода ASTRA [6]. В этом случае полное спектрально-угловое распределение интенсивности ПИ можно рассчитать с помощью выражения (3):

$$\frac{d^2W}{d\omega d\Omega} = \frac{d^2W_0}{d\omega d\Omega} \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^N e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (s[r_p - r_j])}. \quad (3)$$

Здесь  $s = \{A, B, C\}$  из (2) и  $r_p, r_j$  – координаты  $p$ -ой и  $j$ -ой частицы в пучке, соответственно. Далее из равенства формул (1) и (3), получим выражение для ФФ (4):

$$F = \left( \sum_1^N \sum_1^N e^{i\frac{2\pi}{\lambda} (s[r_p - r_j])} - N \right) / N(N-1). \quad (4)$$

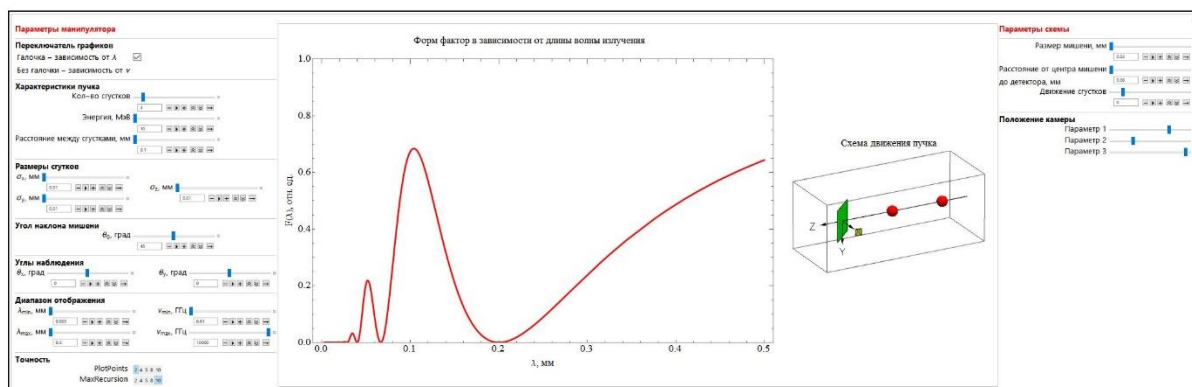


Рис. 2. Внешний вид манипулятора, график форм фактора (слева) и схема (справа)

Преимущество данного способа в том, что он позволяет рассчитать ФФ для реального ПРЧ в последовательности сгустков. Недостаток способа – резкое увеличение времени расчёта с ростом числа частиц. Пока расчёт ФФ реальных сгустков ( $\sim 10^8 \div 10^{10}$  частиц) по (4) на ПК средней производительности без оптимизации требует колоссального количества времени.

### Сравнение подходов

Для сравнения подходов (формулы (2) и (4)) был случайным образом сгенерирован набор координат точек, представляющий из себя два гауссовых сгустка с одинаковыми поперечными и продольными размерами. Каждый сгусток состоял из 1000 частиц. На рис. 3 приведено сравнение ФФ, рассчитанных на основе вышеописанных подходов, для электронов с энергией 10 МэВ.

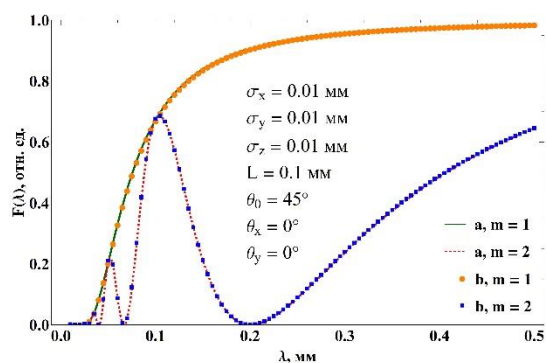


Рис. 3. Сравнение аналитического (а) и численного (б) подходов, где  $L$  – расстояние между сгустками

Видно хорошее согласие двух подходов для случая 1-го и 2-х сгустков. В приведённом диапазоне длин волн разность значений в основном  $< 2\%$ , кроме интервалов, соответствующих минимумам ФФ. Это связано с расчётами малых значений на пределе машинной точности. Заметим, что сравнение проведено для конкретных значений угла наблюдения и угла наклона мишени.

### Заключение

Следуя классическому подходу, получена формула расчёта ФФ для ПИ, учитывающая произвольные: количество сгустков, их пространственные размеры, расстояние между ними, энергию, заряд, наклон мишени и положение точки наблюдения.

Помимо этого, разработан принципиально новый подход расчёта ФФ по произвольному дискретному распределению частиц в пространстве. Сравнение двух подходов для расчёта ФФ даёт хорошее совпадение с разницей  $< 2\%$ .

Для автоматизации расчёта “аналитического” ФФ по формуле (2) создан манипулятор, позволяющий динамически задавать множество параметров. На выходе получается график ФФ для равномерного распределения одинаковых сгустков и наглядная схема взаимодействия пучка (последовательности сгустков) с мишенью. В разработке находится расширенная версия, обобщённая на произвольные параметры каждого сгустка, а также аналогичное приложение для численного подхода.

### Список использованных источников

1. Гинзбург В.Л., Цытович В.Н. Переходное излучение и переходное рассеяние: монография. – М.: Наука, 1984. – 359 с.
2. Mihalcea D. et al. // Phys. Rev. ST-AB. – 2006. – Vol. 9. – 082801
3. Гарибян Г.М., Ян Ши Рентгеновское переходное излучение: монография. – Ер.: Изд-во АН АрмССР, 1983. – 320 с.
4. Потылицын А.П. // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – Т. 103. – № 11. – С. 762-766.
5. Науменко Г.А. // Известия ВУЗов. – 2007. – № 10/3. – С. 199-206.
6. A Space Charge Tracking Algorithm [Эл. ресурс]. – URL: <http://www.desy.de/~mpyflo/> (дата обращения 13.11.2019)